6° Μάθημα:

18/11/2019

Θεώρημα Foster (ΕΥΕΥ)

Σε μια μη διαχ/μη εργοδική (θετ επ/κη + απεριοδική) Μ.Α. υπάρχει το διάνυσμα των οριακών πιθανοτήτων $\Pi = (\Pi_0 \ \Pi_1 \ \Pi_2 \ \dots)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\Pi = \Pi \cdot P$ όπου P ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος.
Αν επιπλέον $X = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ είναι λύση της $X = X P$ με $\Sigma |x_i| < +\infty$ τότε $\Pi = cX$ τ.ω. $\Sigma \Pi_i = 1$.

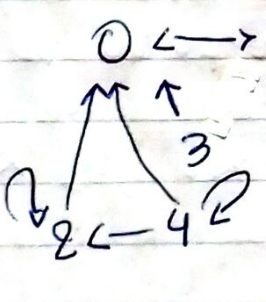
Αντίστροφα, μια μη διαχ/μη Μ.Α. είναι θετ επαν/κή όταν $\exists x$ τ.ω. $X = X \cdot P$ με i) όχι όλα τα $x_i = 0$
ii) $\Sigma |x_i| < +\infty$

π.χ. (Άσκηση 3.10.8 από βιβλίο)

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{1/4} & \boxed{0} & 0 & \boxed{3/4} & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

1) να ταξινομηθούν όλες οι καταστάσεις
2) να βρεθούν οι οριακές πιθανότητες
3) να βρεθεί ο μέσος χρόνος επανάληψης όλων των επαναληπτικών καταστάσεων.

1)



$\{0,1,3\}$ κλ. κύκλωμα επικ. καταστάσεων πεπ. πλήθους $\Rightarrow$ θετ. επαν/κη

$\left.\begin{array}{l} 2 \to 0 \\ 0 \not\to 2 \end{array}\right]$ άρα αν υποθέσω ότι 2 επαν/κή καταλήγω άτοπο.

Ομοίως 4, 2 παροδικές

επομένως οι οριακές πιθανότητες $\Pi_4 = \Pi_2 = 0$

2) οι καταστάσεις 0,1,3 όντας σε ένα κλειστό κύκλωμα επικ. καταστάσεων αποτελούν μια μη διαχ. Μ.Α. με πίνακα μετάβασης

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0 \to 1 \to 0 \qquad \frac{1}{4}=p_{00}^{(2)}>0$$

$$0 \to 1 \to 3 \to 0 \qquad \frac{3}{4}=p_{00}^{(3)}>0$$

$$\text{ΜΚΔ}\{2,3,\dots\}=1$$

Η περίοδος του μηδέν είναι 1.

Οι καταστάσεις 0,1,3 έχουν όλες την ίδια περίοδο. Επομένως η περίοδος της Μ.Α. που συνθέτουν οι καταστάσεις 0,1,3 είναι 1. Επομένως η Μ.Α είναι απεριοδική.

Άρα καταλήξαμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το ευθύ του θεωρήματος foster.

$$(x_0 \ \ x_1 \ \ x_3) = (x_0 \ \ x_1 \ \ x_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = x_1 \frac{1}{4} + x_3$$

$$x_1 = x_0$$

$$x_3 = \frac{3}{4} x_1$$

Χρησιμοποίησα το ευθύ γιατί ήξερα ότι είναι θετ. επαν/κη. Το αντίστροφο το χρησ. όταν δεν το ξέρω

Επομένως η γενική λύση είναι $\left(x_0, x_0, \frac{3}{4}x_0\right)$

Μια λύση $(4, 4, 3)$

με $x_0 + x_1 + x_3 = 11 < +\infty$

τότε $\pi = c(4,4,3)$ τ.ω. $\pi_0 + \pi_1 + \pi_3 = 1$

$$c4 + c \cdot 4 + c \cdot 3 = 1$$

$$c \cdot 11 = 1$$

$$c = 1/11$$

άρα $\pi = \left(\underset{\pi_0}{\frac{4}{11}}, \underset{\pi_1}{\frac{4}{11}}, \underset{\pi_3}{\frac{3}{11}}\right) \to$ οριακές πιθανότητες

3) $\mu_0 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{11}{4}$

$\mu_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{11}{4}$

$\mu_3 = \frac{1}{\pi_3} = \frac{11}{3}$

$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} \Rightarrow \mu_j = \frac{1}{\pi_j}$

Π.Χ. (3.10.9 από βιβλίο)

ΜΠΑΧΑΜΕΣ = 0 $\xrightarrow{2/3}$ ΕΥΡΩΠΗ, $\xrightarrow{1/3}$ ΧΑΒΑΗ

ΕΥΡΩΠΗ = 1 $\xrightarrow{3/8}$ ΜΠΑΧ, $\xrightarrow{1/8}$ ΕΥΡ, $\xrightarrow{1/2}$ ΧΑΒ

ΧΑΒΑΗ = 2 $\xrightarrow{1/2}$ ΕΥΡ., $\xrightarrow{1/2}$ ΜΠΑΧ.

1) Να γράψω τον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Να βρεθούν οι πιθ. των προτιμήσεων τα μετά από πολύ μεγάλο χρον. διάστημα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & 1 \arrow[loop above] \arrow[d, leftrightarrow] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

Είναι μη διαχ/μη Μ.Α.

Πεπερ/νο πλήθος καταστάσεων $\Rightarrow$ θετ. επαν/κ

Απεριοδική π.χ. $d_1 = 1$.

Για να βρω τις οριακές πιθ. πρέπει να χρησιμοποιή-σω το ευθύ του Θεωρήματος Foster

Αρχικά θα προσδιορίσω μια λύση $x = x \cdot P$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2) = (x_0 \;\; x_1 \;\; x_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_0 = X_1 \cdot \frac{3}{8} + X_2 \frac{1}{2}$$

$$X_1 = X_0 \cdot \frac{2}{3} + X_1 \cdot \frac{1}{8} + X_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$X_2 = X_0 \cdot \frac{1}{3} + X_1 \frac{1}{2}$$

("πετάω" την $2^{η}$ εξισ)

άρα $X_2 = \frac{1}{3}\left(X_1 \cdot \frac{3}{8} + X_2 \cdot \frac{1}{2}\right) + X_1 \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$X_2 = \frac{1}{8} X_1 + \frac{1}{6} X_2 + \frac{1}{2} X_1 \Rightarrow$$

$$X_2 \frac{5}{6} = \frac{5}{8} X_1 \Rightarrow \boxed{X_2 = \frac{3}{4} X_1}$$

$$X_0 = X_1 \cdot \frac{3}{8} + X_2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow X_0 = X_1 \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} X_1 = \frac{6}{8} X_1 = \frac{3}{4} X_1$$

Γενική λύση $\left(\frac{3}{4} X_1, X_1, \frac{3}{4} X_1\right)$

Για $X_1 = 4$ δίνει: $(3, 4, 3)$

με $X_0 + X_1 + X_2 = 10$

Άρα $\Pi = (\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2) = c(3 \ 4 \ 3)$ τ/ω $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

$$\pi = \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

3) Αν φέτος ο επιχειρηματίας πέρασε τις διακοπές του στην Ευρώπη, μετά από πόσα χρόνια προσδοκά να επισκεφθεί ξανά την Ευρώπη?

Ψάχνω αναμ. χρόνο να ξανά επισκεφ. την Ευρ. αναμένεται δηλ. Μέσος χρόνος επανάληψης της Ευρώπης δηλ. της κατάστασης 1.

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{10}{4}$$

οριακές πιθ. έχουν σχέση με μέσο χρόνο επαναληψ

⊛ Έστω ότι είχα 2 καταστάσεις. Την i και την j και μου ζητάω να βρω το μέσο αριθμό επισκέψεων της κατάστασης j σε n βήματα ξεκινώντας από την κατάσταση i. (όμοια με 3.2.1)

π.χ.

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\
0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$0 \leftrightarrow 1$
κλ. κυκλ. επικ. καταστ.

$2 \leftrightarrow 3$, 4 κλ. κυκλ. επικοιν. κατ.

$\left.\begin{array}{l} 5 \to 1 \\ 1 \not\to 5 \end{array}\right\}$ 5 παροδική.

$\left.\begin{array}{l} 6 \to 1 \\ 1 \not\to 6 \end{array}\right\}$ 6 παροδική.

Για να βρω π_0, π_1 έχω: $(x_0 \;\; x_1) = (x_0 \;\; x_1)\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$

$x_0 = x_0 \cdot 0.2 + x_1 \cdot 0.7 \Rightarrow$
$8x_0 = 7x_1 \Rightarrow x_0 = \frac{7}{8}x_1$

Γενική λύση $(7/8 \cdot x_1, x_1)$.
για $x_1 = 8$: $(7, 8)$ με $\pi = \left(\frac{7}{15}, \frac{8}{15}\right) = (\pi_0, \pi_1)$.

Για τα (π_2, π_3, π_4):

$$(x_2\ \ x_3\ \ x_4') = (x_2\ \ x_3\ \ x_4)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Όμοια $(\pi_2\ \ \pi_3\ \ \pi_4) = \left(\frac{6}{23}\ \ \frac{7}{23}\ \ \frac{10}{23}\right)$

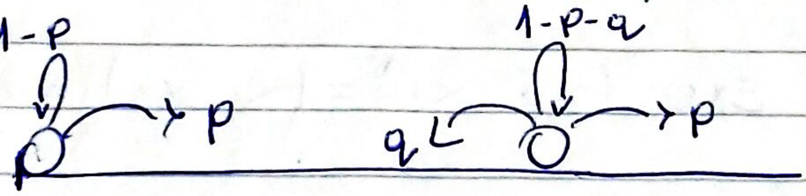
Επομένως συνοψίζοντας

$$(\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5\ \pi_6) = \Big(\underbrace{\tfrac{7}{15}, \tfrac{8}{15}}_{\text{αθροισμα ορ. πιθ.} = 1}, \underbrace{\tfrac{6}{23}, \tfrac{7}{23}, \tfrac{10}{23}}_{\text{αθροισμα ορ. πιθ.} = 1}, 0, 0\Big)$$

Δηλ. σε κάθε κλ. κυκλ. το αθροι. των ορ. πιθ. θέλω να είναι μονάδα!

Οριακές Πιθανότητες Για Τον Πίνακα Μετάβασης Σ.Δ. Με Ένα Φράγμα ανάκλασης Στο Μηδέν

Περίπτωση του απλού τυχαίου περιπάτου.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 1-p-q & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 1-p-q & p & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$$

όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους άρα μη διαχ/μη Μ.Α.

είναι απεριοδική διότι $d_0 = 1$ εφόσον $P_{00}^{(1)} > 0$
όλες οι περίοδοι είναι 1 αφού έχω μη διαχωρίσιμη Μ.Α.
Δεν μπορώ να εφαρμόσω το ευθύ του Foster διότι δεν έχω πεπερ. πλήθος.
και με το αντίστροφο θα εξετάσω αν και πότε αυτή η Μ.Α. είναι θετ. επαν/κη.
Σύμφωνα με το αντίστροφο του Foster θα εξετάσω αν $\exists\, x$ τ.ω. $x = x \cdot P$ με
i) όχι όλα τα $x_i = 0$
ii) $\Sigma |x_i| < +\infty$

$$(x_0 \; x_1 \; x_2 \dots) = (x_0 \; x_1 \; x_2 \dots) \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 1-p-q & p & 0 & \dots \\ & q & 1-p & p & \dots \end{pmatrix}$$

$$x_0 = x_0(1-p) + x_1 q$$
$$\Rightarrow x_0(1-1+p) = x_1 q \Rightarrow \boxed{x_0 \cdot p = x_1 q} \quad (1)$$
$$\boxed{x_1 = \frac{p}{q} x_0} \quad (2)$$

$$x_1 = x_0 \cdot p + x_1(1-p-q) + x_2 \cdot q \Rightarrow$$
$$x_1 \overset{(1)}{=} x_1 q + x_1(1-p-q) + x_2 q \Rightarrow$$
$$x_1(1-q-1+p+q) = x_2 \cdot q \Rightarrow$$
$$\boxed{x_1 \cdot p = x_2 \cdot q} \quad (3)$$

$$\boxed{x_2 = \frac{p}{q} x_1 \overset{(2)}{=} \left(\frac{p}{q}\right)^2 x_0} \quad (4)$$

αν συνεχίσω τις πράξεις βρίσκω $x_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 \cdot x_0$

$(x_0 \quad x_1 \quad x_2 \ldots) = (x_0 \quad \frac{p}{q} x_0 \quad \frac{p}{q} x_0^2 \quad \ldots)$

$x_k = \left(\frac{p}{q}\right)^k x_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Μια λύση είναι για $x_0 = 1$: $\left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \ldots\right)$

Ισχύει λοιπόν ότι δεν έχουμε όλα τα $x_i = 0$ (ισχύει η 1) του ανεπτ. του Foster)

Είναι $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^k$ Το ερώτημα είναι πότε συγκλίνει?

Συγκλίνει όταν $\frac{p}{q} < 1$ δηλ. συγκλίνει όταν $p < q$

Επομένως για $p \geq q$ αποκλίνει

$\Downarrow$

ΠΑΡΟΔΙΚΕΣ Η' ΑΣΘΕΝΩΣ ΕΠ/ΚΕΣ.

$\Downarrow$

ΟΡ. ΠΙΘ. $= 0$

Όταν $p < q$ μόλις απέδειξα ότι είναι ΘΕΤ. επαν. επιπλέον είναι μη διαχ. + απεριοδική.

Με μια λύση του $x = x \cdot P$ να είναι η:

$$x = \left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \ldots\right)$$

Από το ευθύ Θ.F. έχω $\pi = c \cdot x = c\left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \ldots\right)$

$c = \frac{1}{\sum_{k=0}^{+\infty} (p/q)^k} =$, Θα μας δίνεται $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$

$= \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{q}\right)^{-1}} = \left(1 - \frac{p}{q}\right)$ Άρα $\pi_i = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^i, i = 0, 1, 2, \ldots$

Εύρεση Οριακών Πιθανοτήτων για ένα Σ.Δ του Συστήματος Εξυπηρέτησης με αφίξεις Poisson(λ), Εξυπηρέτηση Θέσεις με παράμετρο μ και έναν υπάλληλο.

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ \vdots & 0 & b_0 & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$$b_k = \frac{\mu \cdot \lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} = \frac{\mu \cdot \lambda^k}{\left[\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)\right]^{k+1}} = \frac{\mu \cdot \lambda^k}{\mu^{k+1}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}$$

Είναι μη διαχωρίσιμη όλες επικοινωνούν μεταξύ τους. Απεριοδική (έχω ανακύκλωση)

$(x_0 \ x_1 \ x_2 \dots) = (x_0 \ x_1 \ x_2 \dots) P$

$x_0 = x_0 \cdot b_0 + x_1 \cdot b_0 \Rightarrow x_0(1-b_0) = x_1 \cdot b_0 \Rightarrow$

$x_0\left(1 - \frac{1}{1+\rho}\right) = x_1 \cdot \frac{1}{1+\rho} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_0 \cdot \rho}$

$x_1 = x_0 \cdot b_1 + x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_0 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{x_1}{\rho} b_1 + x_1 \cdot b_1 + x_2 b_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{x_2 = x_0 \cdot \rho^2}$

(κάνοντας πράξεις!) $\boxed{x_3 = x_0 \cdot \rho^3}$

$(x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots) = (x_0 \ x_0\rho \ x_0\rho^2 \dots)$ (Τετριμμένη λύση)

Για $x_0 = 1$: $(1 \ \rho \ \rho^2 \ \dots)$

Άρα $\exists x$ με όχι όλα τα $x_i = 0$

Θα εξετάσω πότε $\Sigma |x_i| < +\infty$

Δηλ. πότε $\Sigma \rho^k < +\infty$

Συμβαίνει $\rho < 1$

Συγκλίνει όταν $\rho<1$. δηλ. τότε είναι
θετ. επαν/κη όταν $\boxed{\lambda<\mu}$
ενώ όταν $\rho \geq 1 \Rightarrow$ ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ $\Rightarrow$
Αδιαφώς επαν/κη ή παροδική

$\Downarrow$

ορ. πιθ $=0$

Αν $\rho<1$ οι ορ. πιθ.

$$\Pi = c(1 \quad \rho \quad \rho^2 \quad \rho^3 \ldots)$$

$$\Pi = \frac{1}{\Sigma \rho^k}(1 \quad \rho \quad \rho^2 \quad \rho^3 \ldots)$$

$$\Pi = (1-\rho)(1 \quad \rho \quad \rho^2 \quad \rho^3 \ldots)$$